

СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ ОПТИЧЕСКОГО ПОТОКА ДЛЯ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ СМЕЩЕНИЯ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

А.Б. Колкер^{1,2}

¹ ФГБУ «Сибирский региональный научно-исследовательский гидрометеорологический институт», Новосибирск

² ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет», Новосибирск

Методы оптического потока находят все более широкое применение в метеорологии. В статье рассматриваются популярные методы, нашедшие свою реализацию в пакете OpenCV применительно к задаче обработки спутниковых изображений. Сделаны выводы о рамках применимости и даны рекомендации по настройке параметров.

Ключевые слова: оптический поток, дистанционное зондирование Земли, оценка полей ветра.

COMPARISON OF THE EFFICIENCY OF OPTICAL FLOW TECHNIQUES FOR THE AUTOMATED ESTIMATION OF METEOROLOGICAL FIELD DISPLACEMENT

A.B. Kolker^{1,2}

¹ Siberian Regional Research Hydrometeorological Institute, Novosibirsk

² Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk

Optical flow techniques are increasingly being used in meteorology. The article discusses popular techniques that have found their implementation in the OpenCV package in relation to the task of satellite image processing. Conclusions are drawn about the scope of applicability and recommendations are given for setting the parameters.

Key words: optical flow, remote Earth sensing, wind estimation.

Введение

Алгоритмы оптического потока являются важными источниками данных во многих прикладных задачах, связанных с отслеживанием пере-

мещений объектов на изображениях. В связи с развитием оптических и радиолокационных методов наблюдения, методы оптического потока становятся все более популярны в метеорологии. Так, например, в работе [1] алгоритм TV11 [2] решает задачу определения характеристик атмосферы, необходимых для вычисления турбулентности, а в работе [3] применяется для решения задачи наукастинга грозовой активности. Для решения задач, связанных с регистрацией и отслеживанием локальных явлений атмосферы по данным спутникового зондирования и радиолокационным изображениям, требуется обеспечить высокую детальность определения метеорологических параметров. Методы оптического потока являются перспективным инструментом для решения подобных задач. Ранее этот подход использовался автором в [4] при построении алгоритма наукастинга атмосферной турбулентности с применением данных дистанционного зондирования Земли космическими аппаратами «Арктика-М1». В процессе выполнения работ была отмечена большая вариативность результата в зависимости от задаваемых настроечных параметров алгоритма. Темой настоящей работы является сравнительный анализ различных подходов к определению оптического потока, а также построение рекомендаций по настройке алгоритма применительно к исходным данным, полученным с космического аппарата, оснащенного регистрирующей аппаратурой МСУ-ГС [5].

Общие положения

Оптическим потоком называют вектора перемещения объектов, зарегистрированных на серии последовательности изображений или массивов данных. Перемещение объектов может быть вызвано как движением объектов относительно камеры, так и движением камеры относительно объектов.

Между последовательными кадрами можно выразить интенсивность изображения I как функцию пространства (x, y) и времени t . Таким образом, изображение в момент времени $t1$ соответствует перемещению пикселей изображения $I(x, y, t)$ на (dx, dy) в течение времени $t - I(x + dx, y + dy, t + dt)$. Важным допущением является тот факт, что интенсивность пикселей при этом не меняется. Очевидно, что при анализе метеорологических полей (как и для многих других задач, связанных с динамикой жидкостей и газов) данное свойство не всегда достижимо, что существенно влияет на качество восстановленных данных.

Однако, опираясь на вышеотмеченное допущение, можно разложить сигнал в ряд Тейлора и сформировать систему уравнений [6].

$$I(x + \delta x, y + \delta y, t + \delta t) = I(x, y, t) + \frac{\partial I}{\partial x} \delta x + \frac{\partial I}{\partial y} \delta y + \frac{\partial I}{\partial t} \delta t \dots$$

Очевидно, что система оказывается недоопределенной, даже если пренебречь всеми членами разложения, кроме первого, (x) :

$$\frac{\partial I}{\partial x} \delta x + \frac{\partial I}{\partial y} \delta y + \frac{\partial I}{\partial t} \delta t = 0. \quad (1)$$

Поделив выражение на dt , можно получить уравнение оптического потока:

$$\frac{\partial I}{\partial x} u + \frac{\partial I}{\partial y} v + \frac{\partial I}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

где dI/dx , dI/dy и dI/dt – градиенты изображения по горизонтальной и вертикальной оси и времени. Очевидно, что в данном уравнении два неизвестных, поэтому оно не будет иметь единственного решения.

Проблему поиска оптического потока можно решить несколькими способами, одним из которых может быть отслеживание положения особых точек изображения на последовательности кадров. Особая точка изображения – это локальный фрагмент, обладающий уникальным и узнаваемым набором описания поведения градиентов. Уникальность описания особой точки требует, чтобы в ее окрестностях наблюдались значительные и характерные поведения градиента. Особые точки, как правило, расположены в местах сгущения изолиний яркости изображения (углы фигур, характерные изменения яркости и формы объектов), следовательно, поле данных должно обладать достаточными градиентами и высокими значениями первой производной.

В работе [9] сформулированы общие требования к особым точкам:

- *Отличимость (distinctness)* – особая точка должна явно выделяться на фоне и быть уникальной в своей окрестности.
- *Инвариантность (invariance)* – определение особой точки должно быть независимо к аффинным преобразованиям.
- *Стабильность (stability)* – определение особой точки должно быть устойчиво к шумам и ошибкам.
- *Уникальность (uniqueness)* – кроме локальной отличимости, особая точка должна обладать глобальной уникальностью для улучшения различимости повторяющихся паттернов.
- *Интерпретируемость (interpretability)* – особые точки должны определяться так, чтобы их можно было использовать для анализа соответствий и выявления интерпретируемой информации из изображения.

Очевидно, что для относительно гладких метеорологических полей поиск достаточного количества стабильных во времени особых точек, распределенных по изображению, может оказаться неосуществимой задачей. Исходное изображение может быть подвергнуто свертке для «проявления» градиентов, и/или может быть проведена дискретизация уровней в целях искусственного создания точек экстремумов производных. К сожалению,

такой подход будет весьма чувствителен к шумам измерений и ошибкам географической привязки. Задача отслеживания положения особой точки связана с анализом поведения градиентов в некоторой ее окрестности в рамках последовательности кадров [10]. Очевидно, что данный подход не решает задачу определения поля векторов для каждой точки изображения и называется разреженным (sparse optical flow). Рассмотрим алгоритмы поиска особых точек и пути их описания.

Детектор Моравца (Moravec)

Моравец [11] является основоположником направления анализа особых точек изображения. Детектор Моравца – самый простой из существующих и, как следствие, наименее эффективный. В основе подхода лежит идея сравнения среднеквадратического отклонения яркости квадратного окна W (обычно с апертурой 3×3 , 5×5 , 7×7 пикселей), сдвигая окно W на 1 пиксель в 8 направлениях (горизонтальных, вертикальных и диагональных). Основным недостатком детектора Моравца применительно к анализу метеорологических явлений является отсутствие инвариантности к преобразованию поворота, что делает его использование на больших временных шагах нецелесообразным, хотя такой подход для частых измерений с хорошими калибровочными коэффициентами и оказывается наименее вычислительно затратным и сравнительно эффективным. Идея детектора Моравца и его модификации лежат в основе множества методов определения ветра по спутниковым данным облачности.

Детектор углов Харриса (Harris corner detection)

Harris Corner Detector – это оператор обнаружения углов, который традиционно используется в алгоритмах компьютерного зрения для поиска углов и определения особых точек изображения. Алгоритм был представлен Крисом Харрисом и Майком Стефенсом в 1988 г. [12] и представляет собой усовершенствование углового детектора Моравца. Авторы модифицировали детектор Моравца, введя анизотропию по всем направлениям.

Взвешенная сумма квадрата разностей (sum of squared differences (SSD)) между сдвинутым и исходным окном (т. е. изменение окрестности точки (x, y) при сдвиге на (u, v)) равна [12]:

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \sum_{x, y \in W} W(x, y) (I(x+u, y+v) - I(x, y))^2 \approx \\ &\approx \sum_{x, y \in W} W(x, y) (I_x(x, y)u + I_y(x, y)v)^2 \approx (xy) M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $W(x,y)$ – весовая функция (Гаусса или бинарное окно), M – автокорреляционная функция

$$M = \sum_{x,y \in W} W(u,v) \begin{bmatrix} I_x^2 & I_x I_y \\ I_x I_y & I_y^2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Угол характеризуется большими градиентами функции $E(x,y)$ по всем возможным направлениям (x,y) , что фактически означает большие по модулю собственные значения матрицы M .

Поскольку напрямую считать собственные значения вычислительно затратно, Харрисом и Стефенсом была предложена эмпирическая мера отклика [12]:

$$R = \det M - k(\text{tr} M)^2 > k,$$

где k – эмпирическая константа, лежащая в пределах 0,04–0,06.

Детектор Shi-Thomas [13] опирается на аналогичную математическую идею, отличаясь механизмом вычисления и анализа собственных чисел.

Применим алгоритм детектора Shi-Thomas к массиву точек, полученных в результате преобразования спутникового снимка КА «Арктика-М1»¹ на длине волны 6,3 мкм в проекцию Ламберта с ячейкой ~6 км, для оценки плотности отслеживаемых особых точек для определения векторов ветра (рис. 1).

Очевидно, что плотность особых точек и стабильность их обнаружения недостаточны для построения надежного алгоритма отслеживания их положения, следовательно, алгоритмы, основанные на данном подходе, в рамках целевой задачи не являются эффективными.

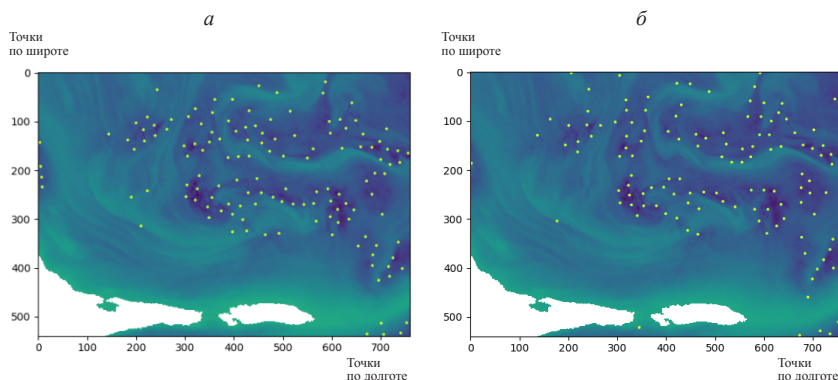


Рис. 1. Поиск особых точек на массивах измерений яркостной температуры в канале 6,3 мкм аппарата «Арктика-М1» (массивы точек по широте и долготе с сеткой 6 км) а) время t ; б) время $t + dt$

¹ Данные спутникового зондирования предоставлены Сибирским центром «НИЦ Планета».

Алгоритмы построения плотного (Dense) потока

Подходы, позволяющие рассчитать оптический поток для каждого положения окна, создают плотный (Dense) оптический поток. Очевидно, что качество построенного решения для всех без исключения подходов в существенной степени зависит от наличия и межкадровой стабильности артефактов градиентов изображения на различных масштабах (модах). Рассмотрим применимость алгоритмов определения плотного (Dense) потока для анализа спутниковых метеорологических данных.

Алгоритм Лукаса–Канаде (Lucas-Kanade: Sparse Optical Flow)

Оригинальный метод [14] (и его модификации) уже многократно рассмотрен в различных публикациях, основан на уравнениях (1) и опирается на следующие предположения:

- при смещении пиксели не меняют собственную яркость;
- соседние пиксели в рамках апертуры смещаются на одинаковое расстояние.

Поиску оптимальных параметров алгоритма посвящено значительное количество публикаций, например [16]. К сожалению, алгоритм не показал способности функционировать на гладких сигналах и для решения поставленной задачи не подходит.

Алгоритм Фарнебека (Farneback Optical Flow)

Метод представлен в публикации [15]. Основная идея метода состоит в аппроксимации соседей каждого пикселя полиномом:

$$I(x)x^T A x + b^T x + c. \quad (5)$$

Отличие от метода Лукаса–Канаде заключается в повышении точности аппроксимации, поскольку используются два члена разложения. Итоговая задача: вычислить смещение d в $I_2(x) = I_1(x - d)$ с помощью полиномиального разложения.

К сожалению, градиенты в спутниковом снимке яркостной температуры, полученном методом дистанционного зондирования Земли, оказываются явно недостаточными для устойчивого функционирования алгоритма (рис. 2). Алгоритм оказывается неспособным отслеживать сдвиг артефактов изображения целевой задачи. На практике отслеживаются лишь области, где наблюдается переход от точек с неопределенными значениями, следовательно, использование данного алгоритма без дополнительного преобразования исходного изображения также не представляется возможным.

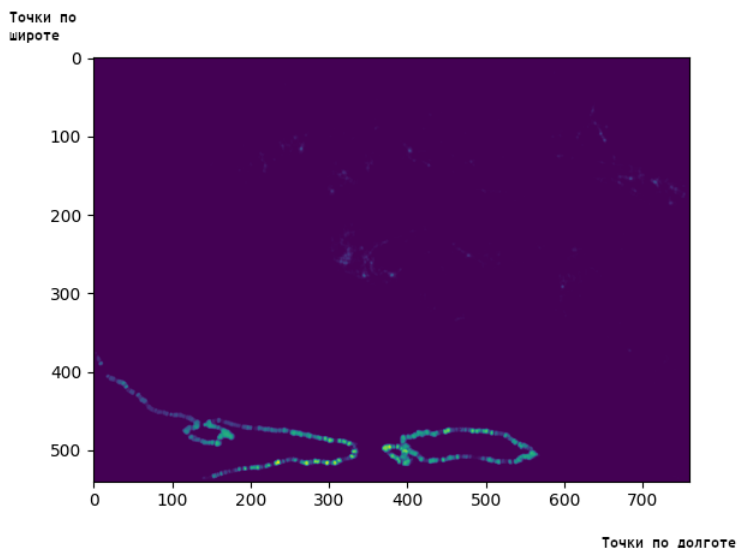


Рис. 2. Поиск векторов оптического потока на массивах измерений яркостной температуры в канале 6,3 мкм аппарата «Арктика-М1» алгоритмом Farneback (массив точек по широте и долготе с сеткой 6 км²)

Алгоритм TvL1

Первоначальная идея алгоритма была предложена в [2] и затем модифицирована в [7]. Алгоритм, реализующий этот метод, можно разделить на два модуля: процедуру, которая вычисляет оптический поток в заданном масштабе, и основной алгоритм, который реализует пирамидальную схему и вызывает процедуру для получения приближенных решений.

Вычислительный эксперимент с рекомендованными по умолчанию параметрами настройки показывает, что алгоритм способен удовлетворительно детектировать вектора оптического потока. Настройке поддаются следующие параметры [4]:

τ – шаг по времени численной схемы. В публикации [7] показано, что численная схема сходится при значениях $\tau < 0,125$. Эмпирически его значение может быть установлено на 0,25 для более быстрой сходимости.

λ – параметр регуляризации. Это наиболее значимый параметр, который определяет гладкость выходных данных. Чем меньше этот параметр, тем более гладкими являются решения. Значение параметра зависит от ожидаемого диапазона магнитуды векторов движений изображений, по-

² Массив узлов сетки COSMO_SIB6.6 по широте и долготе с шагом 6,6.

этому его значение должно быть адаптировано к каждой физичности обрабатываемых изображений.

θ – параметр жесткости. Он служит связующим звеном между пирамидой масштабов и регуляризацией. Метод стабилен при большом диапазоне значений этого параметра.

ε – порог критерия остановки, используемый в численной схеме, задает компромисс между точностью и временем работы. Малое значение дает более точные решения за счет более медленной сходимости.

η – масштабный множитель понижения дискретизации. Он используется для уменьшения масштаба исходных изображений в целях создания пирамидальной структуры. Его значение должно находиться в интервале (0, 1) и также зависит от физичности обрабатываемых данных.

$N \text{ warps}$ – количество итераций в рамках одного масштаба. Один из основных параметров, обеспечивающих стабильность метода, отражает компромисс между скоростью и точностью.

Как показывают эксперименты, функция оптимизации среднеквадратической ошибки от настроечных параметров имеет несколько локальных минимумов, что соответствует разным их комбинациям (например, разные наборы значений жесткости и регуляризации).

Описание вычислительного эксперимента

Целью вычислительного эксперимента являлось определение оптимальных настроечных параметров алгоритмов вычисления оптического потока применительно к изображениям, полученным с КА «Электро-Л» и «Арктика-М1», оснащенных аппаратурой МСУ-ГС (5, 6, 9-й каналы). В данной работе приводится результат прямого применения алгоритма оптического потока без дополнительного постпроцессинга (используется только медианная фильтрация с окном апертуры 5 в целях подавления импульсного шума). Таким образом, задачей этой работы не является построение полной цепочки алгоритма определения векторов ветра по данным спутникового зондирования, а лишь оптимизация настроечных параметров ключевого алгоритма – определения оптического потока. Полная задача по определению векторов ветра содержит модули вычисления высоты поверхности, а также более сложные алгоритмы постпроцессинга, зачастую с применением априорных данных ЧПП, которые в рамках этой статьи не рассматриваются. Канал 6,3 мкм используется для сравнения с данными численного моделирования, поскольку, пренебрегая некоторыми факторами, его можно весьма приближенно считать соответствующим уровню 500 Гпа [8] схем ЧПП.

Пусть имеется изображение I_1 в момент времени t_1 и I_2 в момент времени t_2 , представляющие спутниковые снимки яркостной температуры

на каналах 6,3 мкм. Для определения оптимальных параметров алгоритма требуется обеспечить расчет ошибки, что, в свою очередь, приводит к необходимости иметь информацию об истинном значении векторов оптического потока в каждой точке изображения, что не представляется возможным.

Выполним следующие шаги:

1. Пиксели гео-привязанного изображения считываются в массивы NumPy, содержащие:

- a. I – интенсивности (яркостную температуру),
- b. матрицы широт и долгот.

2. Выполняется нормализация яркостей.

$$In_{x,y} = \frac{\sum_{x=0}^{Nlon} \sum_{y=0}^{Nlat} I_{x,y} \forall I_{x,y} \neq nan}{k} I_{x,y}, \quad (6)$$

где k – число точек изображения, для которых яркостная температура определена. Нормализация яркостей необходима для нивелирования ошибки определения яркостной температуры, которая, к сожалению, для аппаратов серии «Арктика-М1» полностью до настоящего времени не устранена.

3. Выполняется преобразование всех массивов исходных координат к равновеликой азимутальной проекции Ламберта с центральной точкой: $central_longitude=90$, $central_latitude=65$. Выбор проекции обусловлен тем фактом, что данная проекция сохраняет площади (но не сохраняет углы).

4. Исходное изображение проецируется на узлы сетки COSMO, выполняется поиск ближайшего пикселя изображения к узлу сетки COSMO.

5. Выполняется сдвиг на $-u*t - v*t$ для получения точек изображения $I'm1$

$$I'm1_{i,j} = In2_{((i-u(i)*t)/c, (j-v(i)*t)/c)}, \quad (7)$$

где c – размер ячейки в метрах, u, v – проекции скорости.

В работе использована модель COSMO в конфигурации COSMO-SIB, с разрешением 6,6 км и дискретностью по времени 15 мин.

Созданное изображение представляет собой идеализированную картину. Отличия от реального изображения $I1$ обусловлены следующими факторами:

- яркостная температура пикселя реального изображения характеризует значение излучения столба водяного пара или, в случае, когда концентрация водяного пара недостаточна, подстилающей поверхности, что особенно заметно в канале 11,2 длины волны окна прозрачности атмосферы);
- расчетные вектора ветра содержат ошибки моделирования;
- при создании модельного изображения не учитываются вертикальные потоки, хотя они могут также в некоторых случаях оказывать существенное влияние.

Алгоритмы вычисления оптического потока имеют от четырех до семи настроечных параметров. Поиск оптимального значения настроечных параметров выполнялся путем применения линейного спуска. Для алгоритма TVL1 использовались начальные значения настроечных параметров, указанные в [1]. В качестве отправной точки для решения задач оптимизации были использованы следующие значения настроечных параметров:

Таблица 1

Значения, подлежащие оптимизации

| | |
|---------------|------|
| τ | 0,25 |
| ε | 0,1 |
| λ | 0,2 |
| θ | 0,5 |

Таблица 2

Фиксированные значения

| | |
|-----------------|------|
| scaleStep | 0,85 |
| nscases | 50 |
| warps | 5 |
| innerIterations | 20 |
| outerIterations | 60 |

На каждом шаге итерации вычислялось N значений среднеквадратического отклонения построенных векторов ветра путем вариаций каждого из настроечных параметров на величину $\pm 5\%$ от исходного значения. По результатам анализа полученных ошибок выполнялся шаг в сторону наибольшего градиента уменьшения ошибки на величину 0,05 от исходного значения. Останов итерационной процедуры выполнялся по достижении критерия максимального количества итераций или изменения ошибки менее $1e-7$ на каждом шаге. График сходимости среднеквадратической ошибки приведен на рис. 3. Программные модули разработаны на языке Питон и выполняются на 16 потоках.

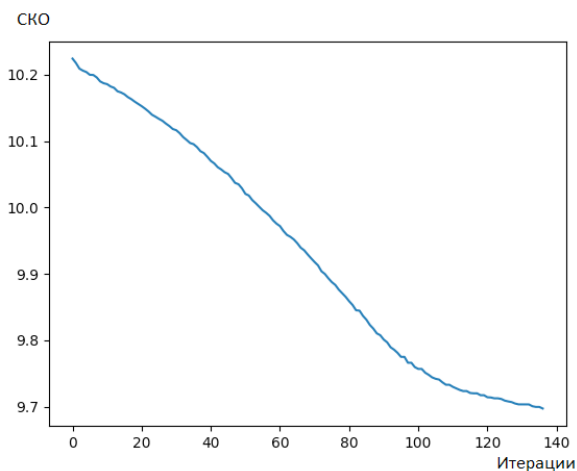


Рис. 3. Сходимость среднеквадратической ошибки при функционировании алгоритма оптимизации

В результате выполнения процедур оптимизации были достигнуты следующие значения настроечных параметров:

Таблица 3

Оптимальные параметры

| | |
|---------------|--------|
| τ | 0,2625 |
| ε | 0,1056 |
| λ | 1,265 |
| θ | 0,8979 |

Рисунок 4 демонстрирует восстановленные вектора ветра по данным КА «Арктика М1» (15 августа 2022 г., наблюдение в 00:15 и 00:45), восстановленные алгоритмом оптического потока TvL1 с указанными выше настроечными параметрами. Рисунок 5 демонстрирует вектора ветра, восстановленные по модельному изображению. Рисунок 6 демонстрирует вектора ветра, полученные в результате ЧПП с использованием модели CosmoSIB6.6.

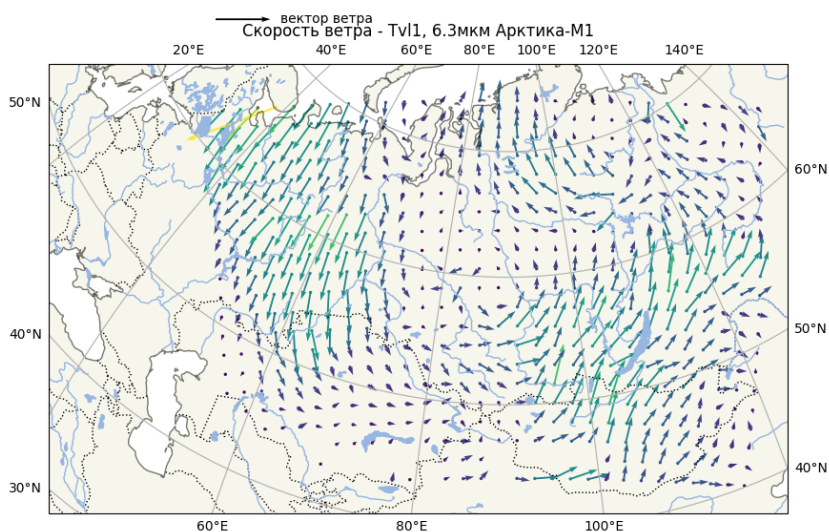


Рис. 4. Вектора ветра, восстановленные алгоритмом TvL1 в найденной оптимальной конфигурации

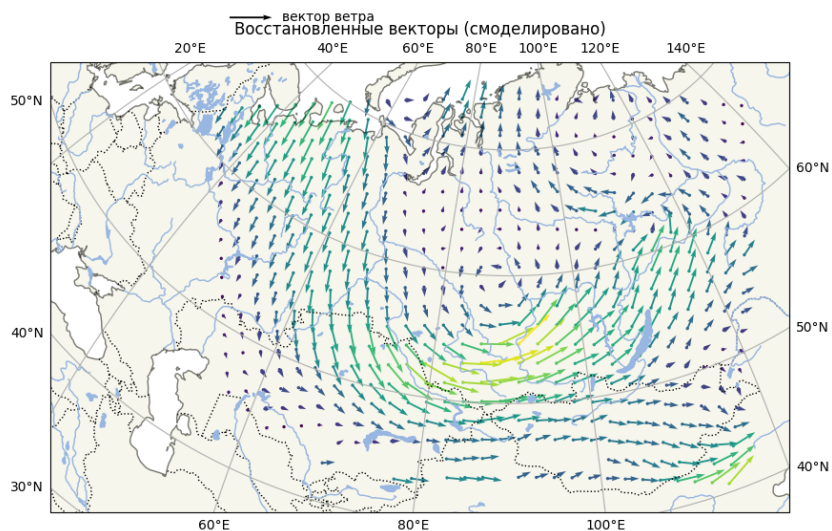


Рис. 5. Вектора ветра, восстановленные алгоритмом оптического потока (смоделированное изображение, идеализированный случай)

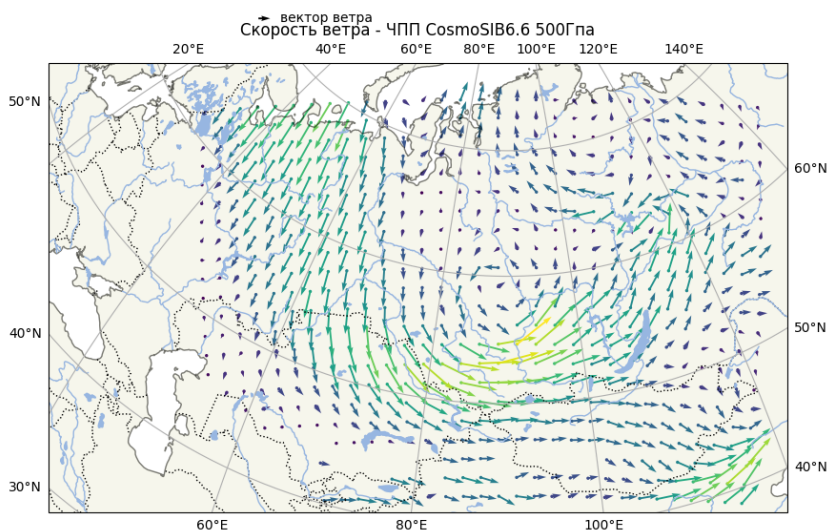


Рис. 6. Вектора ветра на уровне 500 гПа по данным модели COSMO-SIB(6.6)

Анализ полученных результатов

Для определения векторов оптического потока в целевой задаче может быть применен подход TVL1. Рекомендуется проводить настройку параметров регуляризации в соответствии со значениями параметров, перечисленными в табл. 3. Подход показывает приемлемую работоспособность на реальных изображениях, полученных с КА «Арктика-М1». Алгоритм хорошо восстанавливает направление, ошибаясь в магнитуде векторов. Ошибки обусловлены следующими факторами:

- покрытие регионов Западной Сибири космическими аппаратами, расположенными как на геостационарной, так и на высокоэллиптической орбитах, находится на пределе гарантированного приема аппаратов, зачастую за его границей;

- области струйных течений обладают достаточными артефактами градиентов вдоль направлений линий тока, что делает невозможным устойчивое функционирование алгоритмов оптического потока, что в свою очередь приводит к значительным неточностям восстановления скоростей ветра.

Литература

1. Barleben A., Haussler S., Müller R., Jerg M. A Novel Approach for Satellite-Based Turbulence Nowcasting for Aviation // *Remote Sens.* 2020. Vol. 12. P. 2255. DOI: 10.3390/rs12142255.
2. Sánchez J., Meinhardt-Llopis E., Facciolo G. TV-L1 optical flow estimation // *Image Processing On Line.* 2013. Vol. 3. P. 137–150. DOI: 10.5201/ipol.2013.26.
3. Müller R., Barleben A., Haussler S., Jerg M. A Novel Approach for the Global Detection and Nowcasting of Deep Convection and Thunderstorms // *Remote Sens.* 2022. Vol. 14. P. 3372. DOI: 10.3390/rs14143372.
4. Разработка технологии сверхкраткосрочного (до 12 ч) прогноза погоды опасных для авиации явлений в целях создания на территории Российской Федерации Регионального консультативного центра по опасным для авиации явлениям погоды: Отчет о НИР (промежут.)/ФГБУ «СибНИГМИ»; шифр темы 1.4; рук. А.Б. Колкер. Новосибирск, 2020. 159 с. Рег. № НИОКТР АААА-А20-120012890067-4. Рег. № ИКРБС АААА-Б21-221010290002-5.
5. Аппаратура МСУ-ГС, назначение, основные характеристики и режимы работы [Электронный ресурс]. URL: <http://planeta.infospace.ru/electro/html/msu-gs.html> (дата обращения 25.09.2023).
6. Introduction to Motion Estimation with Optical Flow. [Электронный ресурс]. URL: <https://nanonets.com/blog/optical-flow/> (дата обращения 25.09.2023).
7. Zach C., Pock T., Bischof H. A Duality Based Approach for Realtime TV-L¹ Optical Flow. In: Hamprecht F.A., Schnörr C., Jähne B. (Eds.). *Pattern Recognition. DAGM 2007. Lecture Notes in Computer Science.* 2007. Vol. 4713, Ch. 22. P. 214–223. DOI: 10.1007/978-3-540-74936-3_22.

8. *Shen F., Shu A., Li H., Xu D., Min J.* Assimilation of Himawari-8 imager radiance data with the WRF-3DVAR system for the prediction of Typhoon Soudelor // *Nat Hazards Earth Syst Sci.* 2021. Vol. 21. P. 1569–1582. DOI: 10.5194/nhess-21-1569-2021.
9. *Shi J., Tomasi C.* Good Features to Track. In: *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'94)*. 1994. P. 593–600. DOI: 10.1109/CVPR.1994.323794.
10. *Lindeberg T.* Scale Invariant Feature Transform. 2012. DOI: 10.4249/scholarpedia.10491.
11. *Moravec H.P.* Toward Automatic Visual Obstacle Avoidance // *Proc. Fifth of International Joint Conference on Artificial Intelligence*, Vol. 1. Cambridge: MA, August 1977. P. 584.
12. *Harris C., Stephens M.* A Combined Corner and Edge Detector // *Proc. 4th Alvey Vision Conference*. 1988. P. 147–151. DOI: 10.5244/C.2.23.
13. *Tomasi C., Kanade T.* Detection and Tracking of Point Features // *Int. J. Comput. Vis.* 1991. Vol. 9. P. 137–154.
14. *Lucas B., Kanade T.* An Iterative Image Registration Technique with an Application to Stereo Vision // *Proceedings of the 7th International Joint Conference on Artificial Intelligence*. 1981. Vol. 2. P. 674–679.
15. *Farnebäck G.* Two-Frame Motion Estimation Based on Polynomial Expansion. In: *Bigun J., Gustavsson T. (Eds.). Image Analysis. SCIA 2003. Lecture Notes in Computer Science*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2003. Vol. 2749. DOI: 10.1007/3-540-45103-X_5.
16. *Ермолчев А.Ю., Свиринов И.С.* Поиск оптимальных параметров алгоритма Lucas-Kanade // *Евразийское Научное объединение*. 2015. Т. 1, № 6 (6). С. 41–45. EDN TYZCKJ.